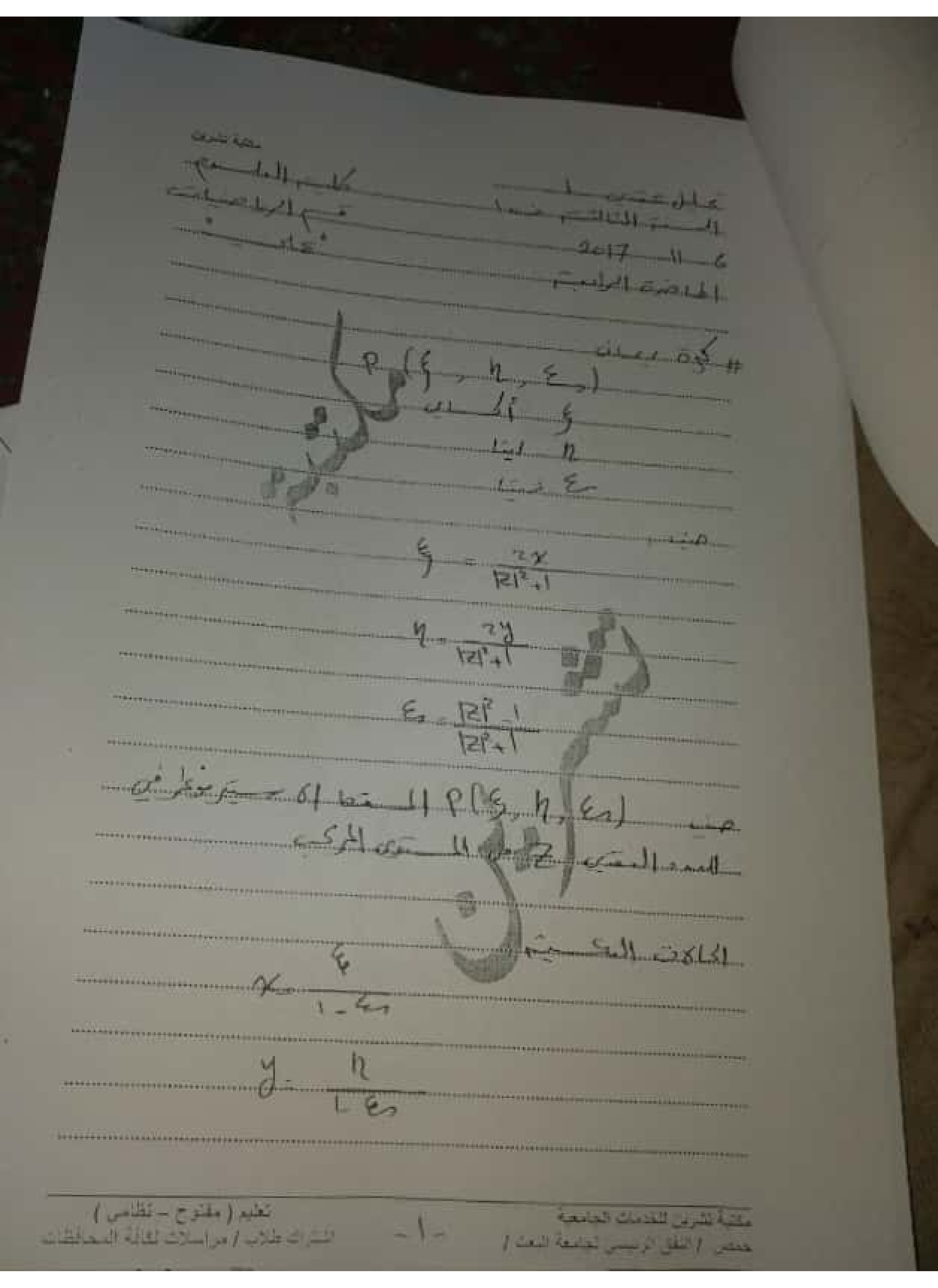


صفحة شخصية

عادل ... كلية العلوم

السنة الثالثة ... قسم الرياضيات

6 - 11 - 2017 تحليل

المحاضرة الرابعة

كرة ريمان

$P(\xi, \eta, \zeta)$

ξ أفقي

η ...

ζ ...

حيث

$$\xi = \frac{2x}{|z|^2+1}$$

$$\eta = \frac{2y}{|z|^2+1}$$

$$\zeta = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

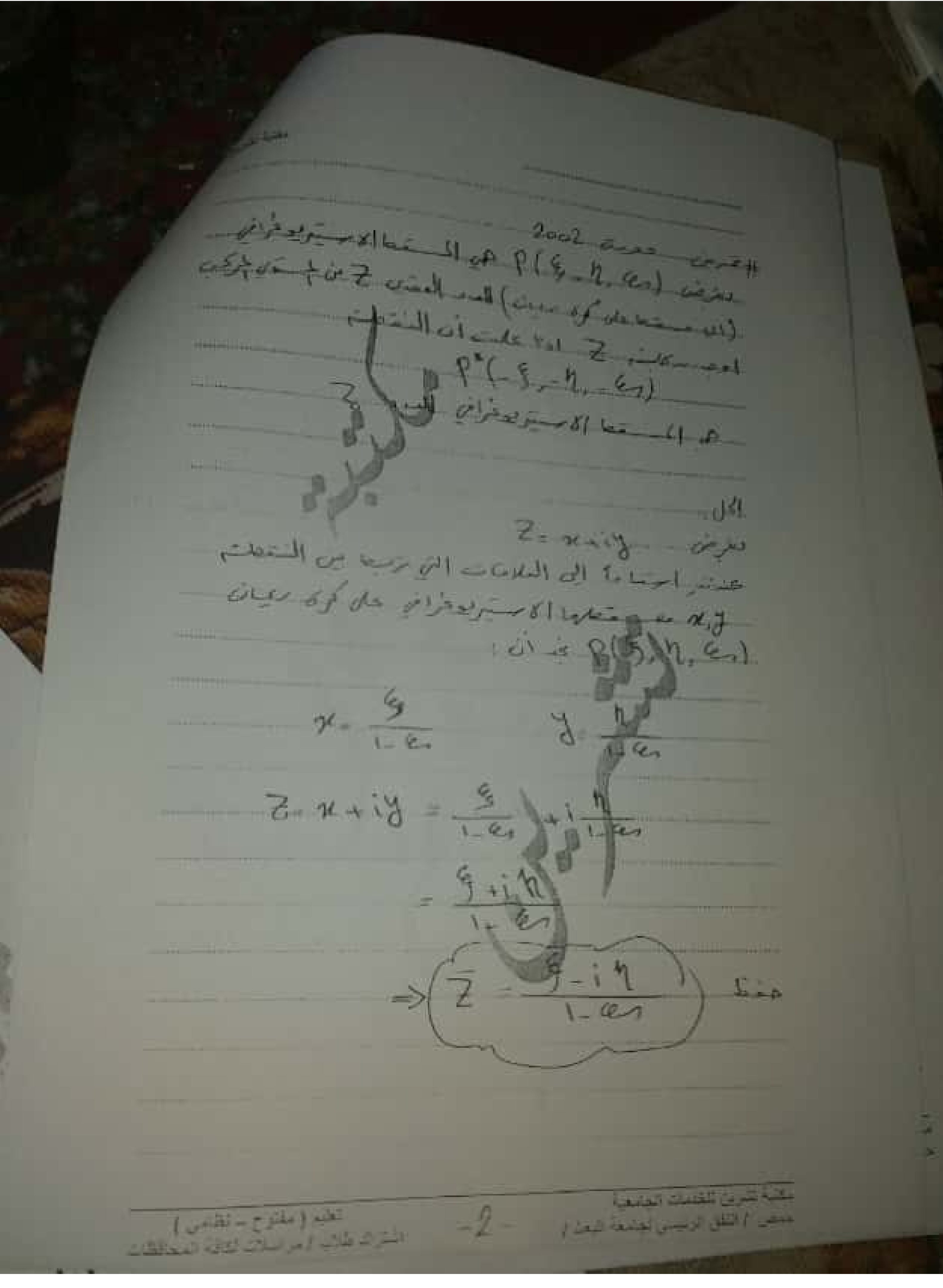
حيث $P(\xi, \eta, \zeta)$ النقطة 61 ...

العدد المركب ... المستوي المركب

العلاقات العكسية

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}$$

$$y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$



#تمرين دورة 2002

نفرض $P(\xi, \eta, \zeta)$ هي المسقط الاستيريوغرافي للعدد العقدي Z من أجل كرة ريمان (التي مستواها الاستوائي هو المستوي العقدي) أوجد مسقط $\bar{Z}$ إذا علمت أن النقطة $P^*(\xi, -\eta, \zeta)$ هي المسقط الاستيريوغرافي للعدد $\bar{Z}$

الحل:

نفرض $Z = x + iy$

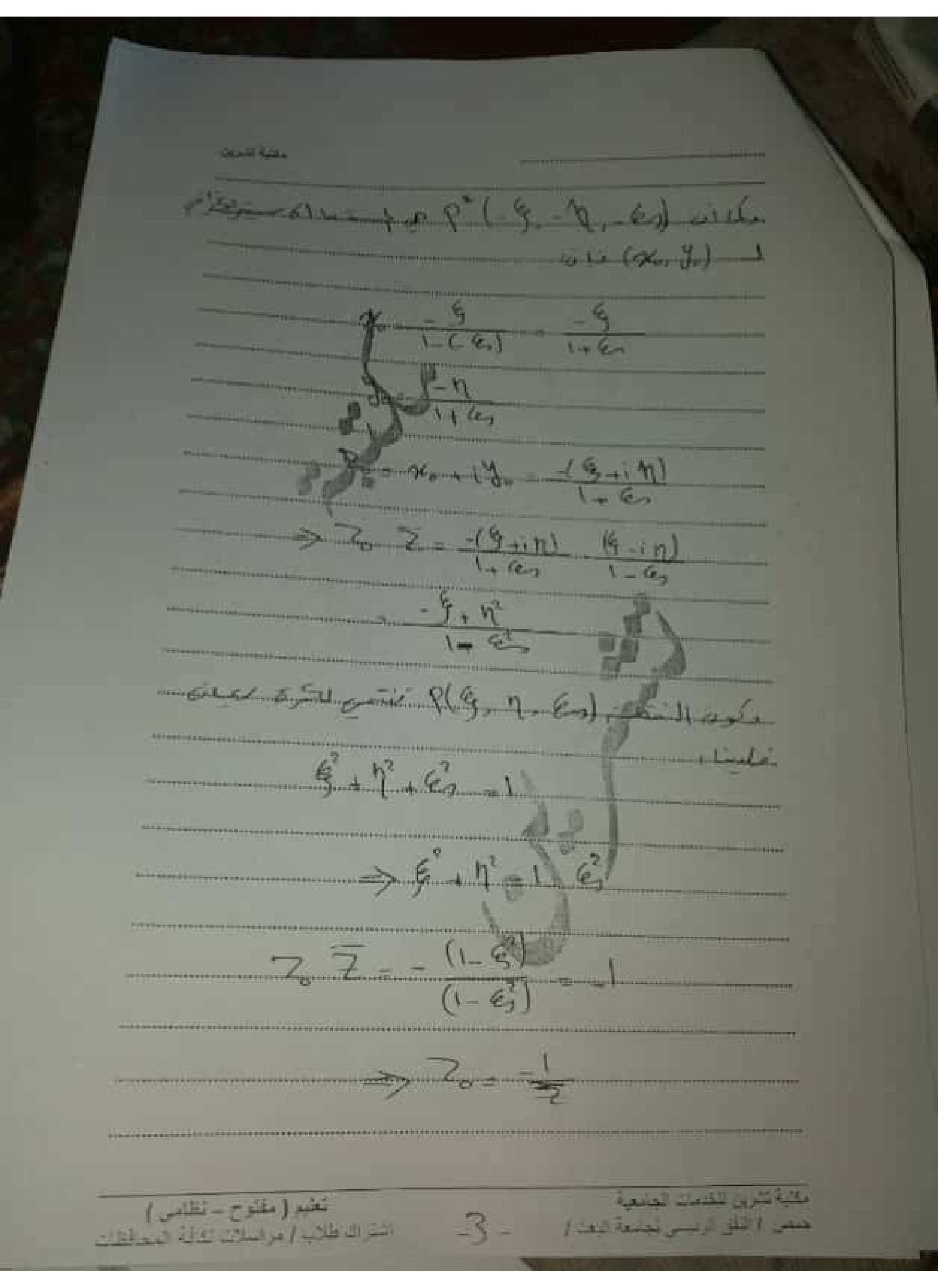
نعتمد أساساً على العلاقات التي تربط بين النقطتين x, y مع مسقطها الاستيريوغرافي على كرة ريمان $P(\xi, \eta, \zeta)$ نجد أن:

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta} \qquad y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

$$Z = x + iy = \frac{\xi}{1-\zeta} + i\frac{\eta}{1-\zeta}$$

$$= \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}$$

$$\Rightarrow \bar{Z} = \frac{\xi - i\eta}{1-\zeta}$$ فقط



مقابلها $P^*(-\xi,-\eta,-\zeta)$ هي مسقطها الستيريوغرافي لـ (x_0, y_0) حيث

$$x_0 = \frac{-\xi}{1-(-\zeta)} = \frac{-\xi}{1+\zeta}$$

$$y_0 = \frac{-\eta}{1+\zeta}$$

$$z_0 = x_0 + i y_0 = \frac{-(\xi + i\eta)}{1+\zeta}$$

$$\Rightarrow z_0 \bar{z} = \frac{-(\xi + i\eta)}{1+\zeta} \cdot \frac{(\xi - i\eta)}{1-\zeta}$$

$$= \frac{-(\xi^2 + \eta^2)}{1-\zeta^2}$$

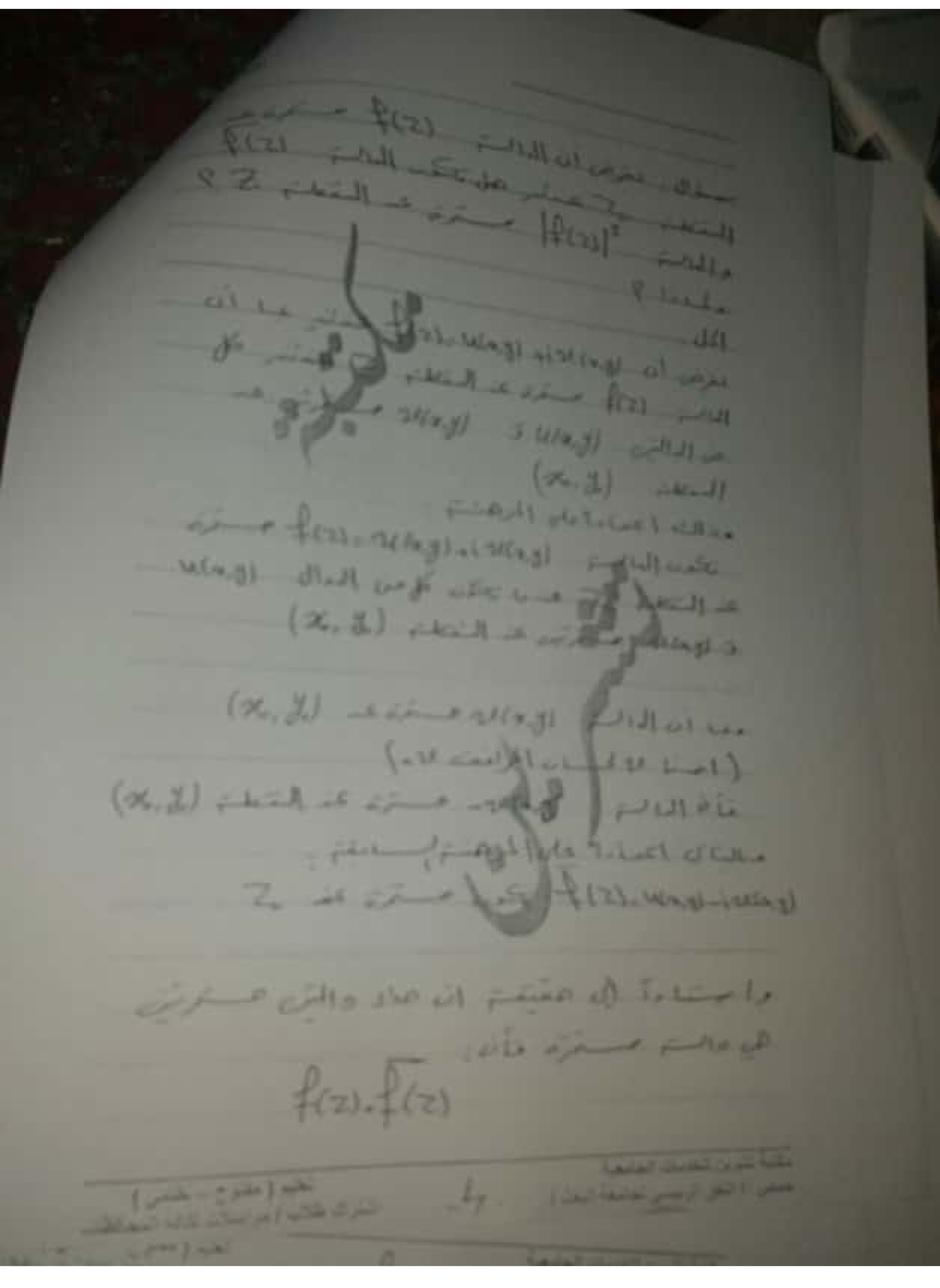
وكون النقطة $P(\xi, \eta, \zeta)$ تنتمي للكرة ... فلدينا:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$\Rightarrow \xi^2 + \eta^2 = 1 - \zeta^2$$

$$z_0 \bar{z} = -\frac{(1-\zeta^2)}{(1-\zeta^2)} = -1$$

$$\Rightarrow z_0 = -\frac{1}{\bar{z}}$$



سؤال: نفرض ان الدالة $f(z)$ مستمرة، هل تكون الدالة $\overline{f(z)}$ مستمرة عند النقطة z؟

والدالة $|f(z)|^2$ مستمرة عند النقطة

والدالة ... ؟

الحل: ... ان

نفرض ان $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ مستمرة ...

الدالة $f(z)$ مستمرة عند النقطة ...

من الدالتين $u(x,y)$ و $v(x,y)$ ...

النقطة (x,y)

من خلال اعتماد المبرهنة $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ مستمرة

تكون الدالتين ... $u(x,y)$

عند النقطة ... مستمرة

و $v(x,y)$ مستمرة عند النقطة (x,y)

بما ان الدالة $v(x,y)$ مستمرة عند (x,y)

(اصبحت ...)

فان الدالة $-v(x,y)$ مستمرة عند النقطة (x,y)

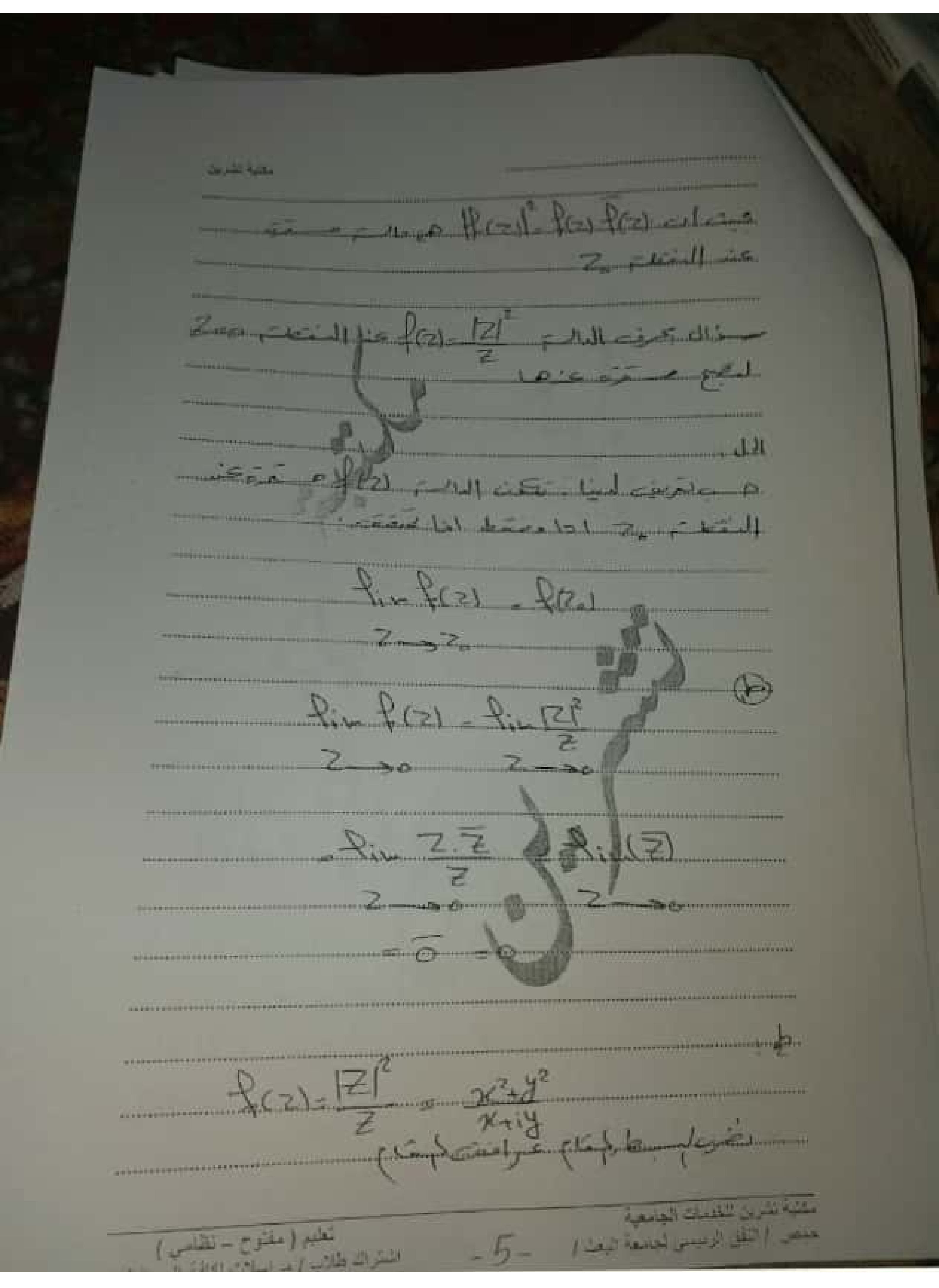
من خلال اعتماد ... :

$\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$ تكون مستمرة عند z

واستنادا الى الحقيقة ان حاصل ضرب دالتين مستمرتين

هي دالة مستمرة فان

$$f(z)\cdot\overline{f(z)}$$



حيث ان $|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)}$ هي دالة مستمرة عند النقطة z_0

مثال: بحوث الدالة $f(z)=\frac{|z|^2}{z}$ عند النقطة $z_0=0$ لتجعل مستمرة عندها

الحل

من تعريف ليما: تكون الدالة $f(z)$ مستمرة عند النقطة z_0 اذا تحقق اذا تحقق:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z}$$

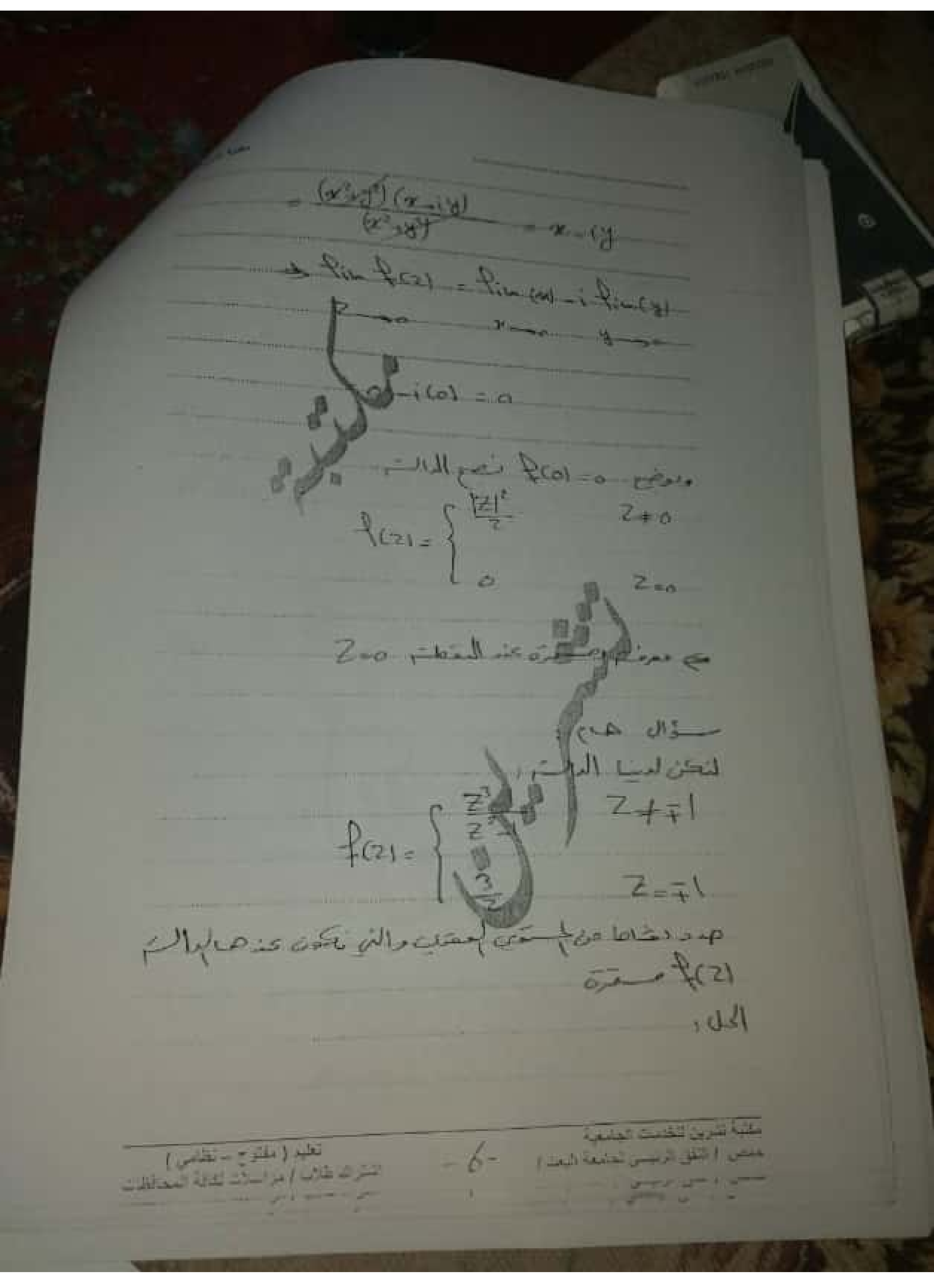
$$= \lim_{z\to 0}\frac{z\cdot\bar{z}}{z} = \lim_{z\to 0}(\bar{z})$$

$$= \bar{0} = 0$$

ط

$$f(z)=\frac{|z|^2}{z} = \frac{x^2+y^2}{x+iy}$$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام



$$= \frac{(x^2+y^2)(x-iy)}{(x^2+y^2)} = x - iy$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{x \to 0}(x) - i \lim_{y \to 0}(y)$$

$$- i(0) = 0$$

ونوضح $f(0) = 0$ نضع الدالة

$$f(z) = \begin{cases} \frac{|z|^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

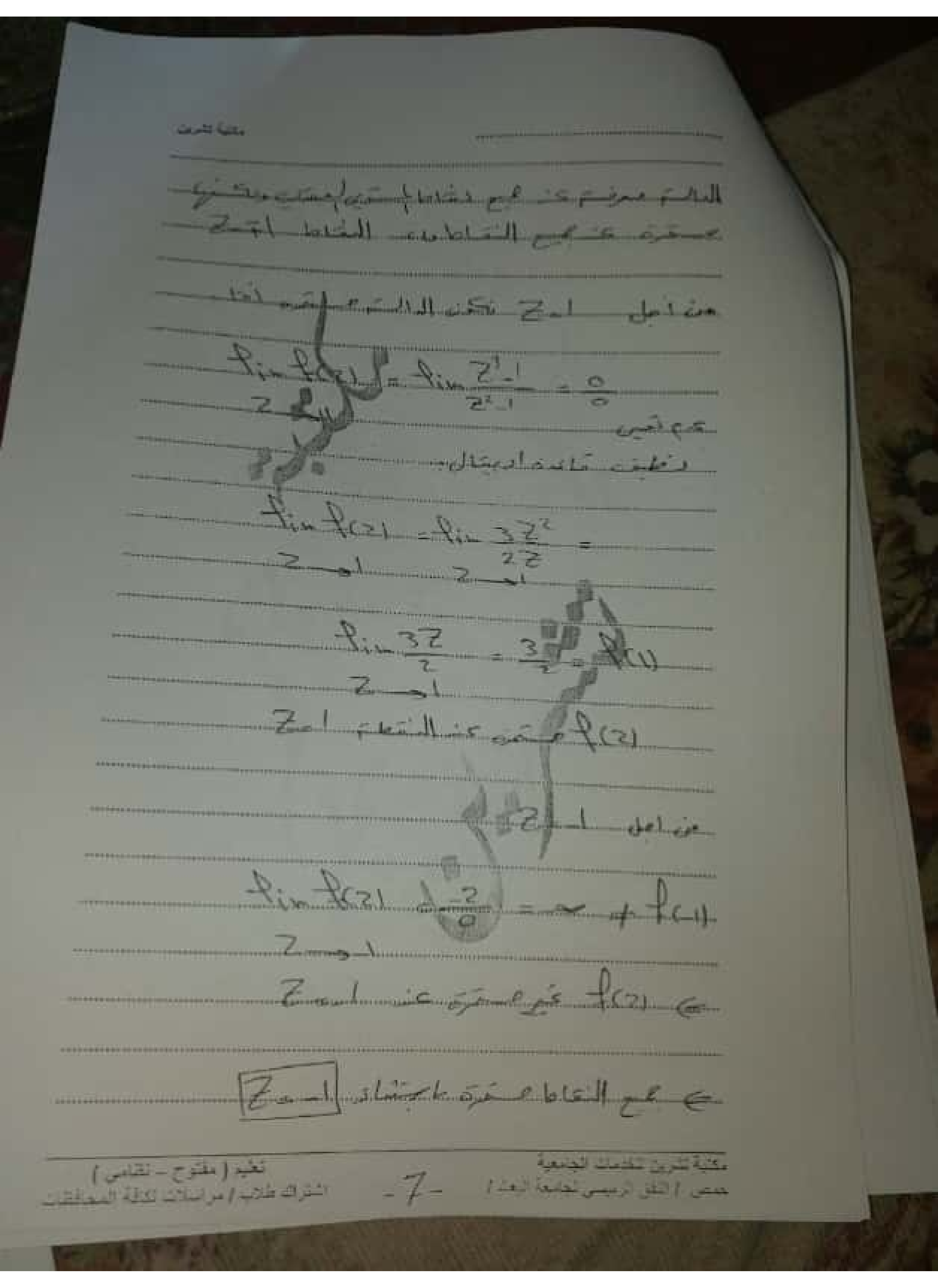
مستمرة عند النقطة $z = 0$

سؤال هام:
لتكن لدينا الدالة:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^3 ...}{z^2 ...} & z \neq \mp 1 \\ \frac{3}{...} & z = \mp 1 \end{cases}$$

حدد نقاطا من المستوى المركب والتي تكون عندها الدالة $f(z)$ مستمرة

الحل:



الدالة معرفة عند جميع نقاط المستوي العقدي ومستمرة عند جميع النقاط ما عدا النقاط z

من أجل $z=1$ لتكن الدالة مستمرة يجب أن

$$\lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z^3-1}{z^2-1} = \frac{0}{0}$$

عدم تعيين

نطبق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{3z^2}{2z} =$$

$$\lim_{z\to 1} \frac{3z}{2} = \frac{3}{2} = f(1)$$

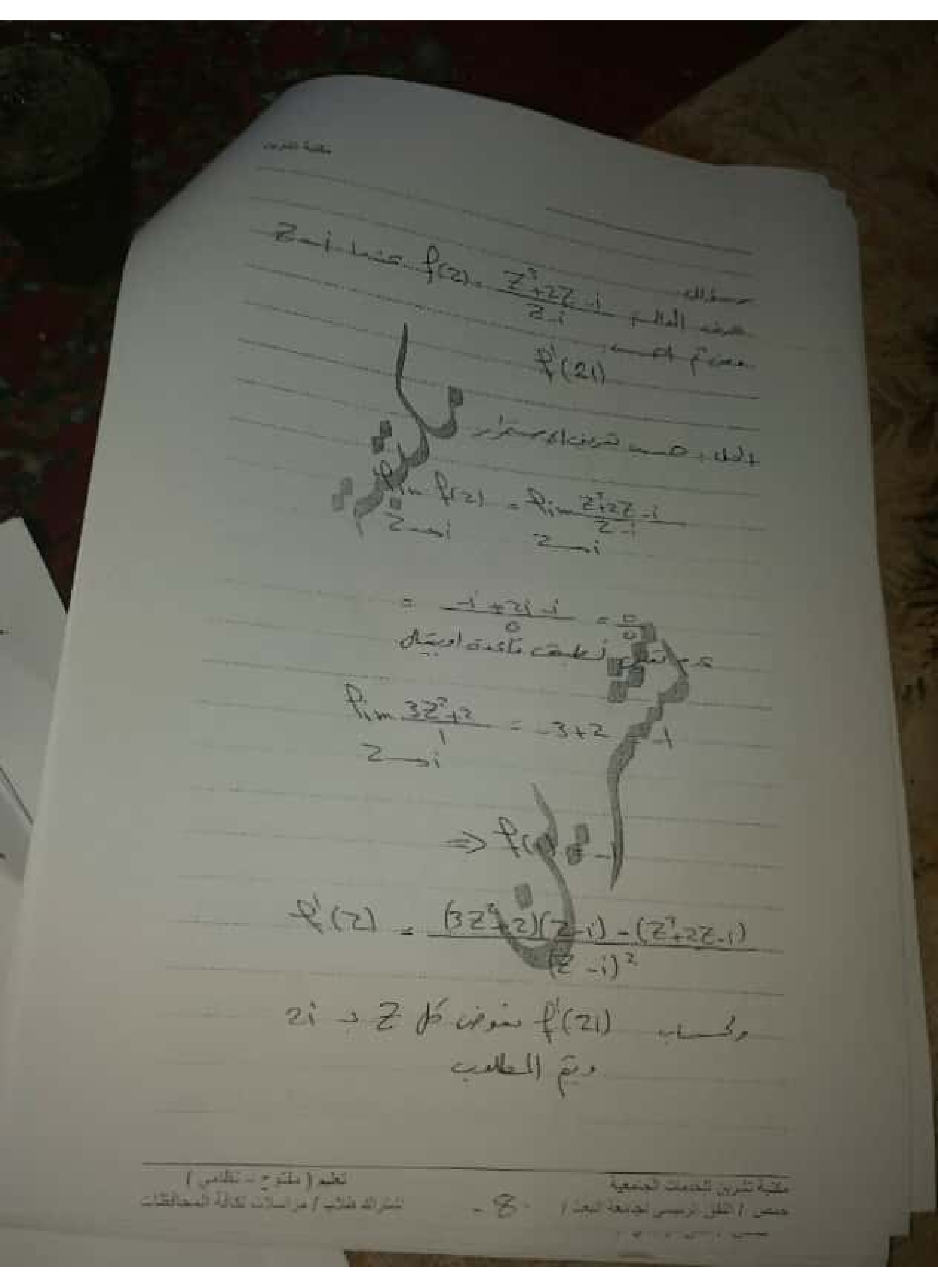
$f(z)$ مستمرة عند النقطة $z=1$

من أجل $z=-1$

$$\lim_{z\to -1} f(z) = \frac{-2}{0} = \infty \neq f(-1)$$

$\Leftarrow$ $f(z)$ غير مستمرة عند $z=-1$

$\Leftarrow$ جميع النقاط مستمرة باستثناء $z=-1$



مسألة

$f(z)=\frac{z^3+2z-1}{z-i}$ عندما $z\neq i$

احسب $f'(2i)$

الحل: حسب تعريف الاستمرار

$\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z^3+2z-1}{z-i}$

$= \frac{-i+2i-i}{0} = \frac{0}{0}$

نطبق قاعدة لوبيتال

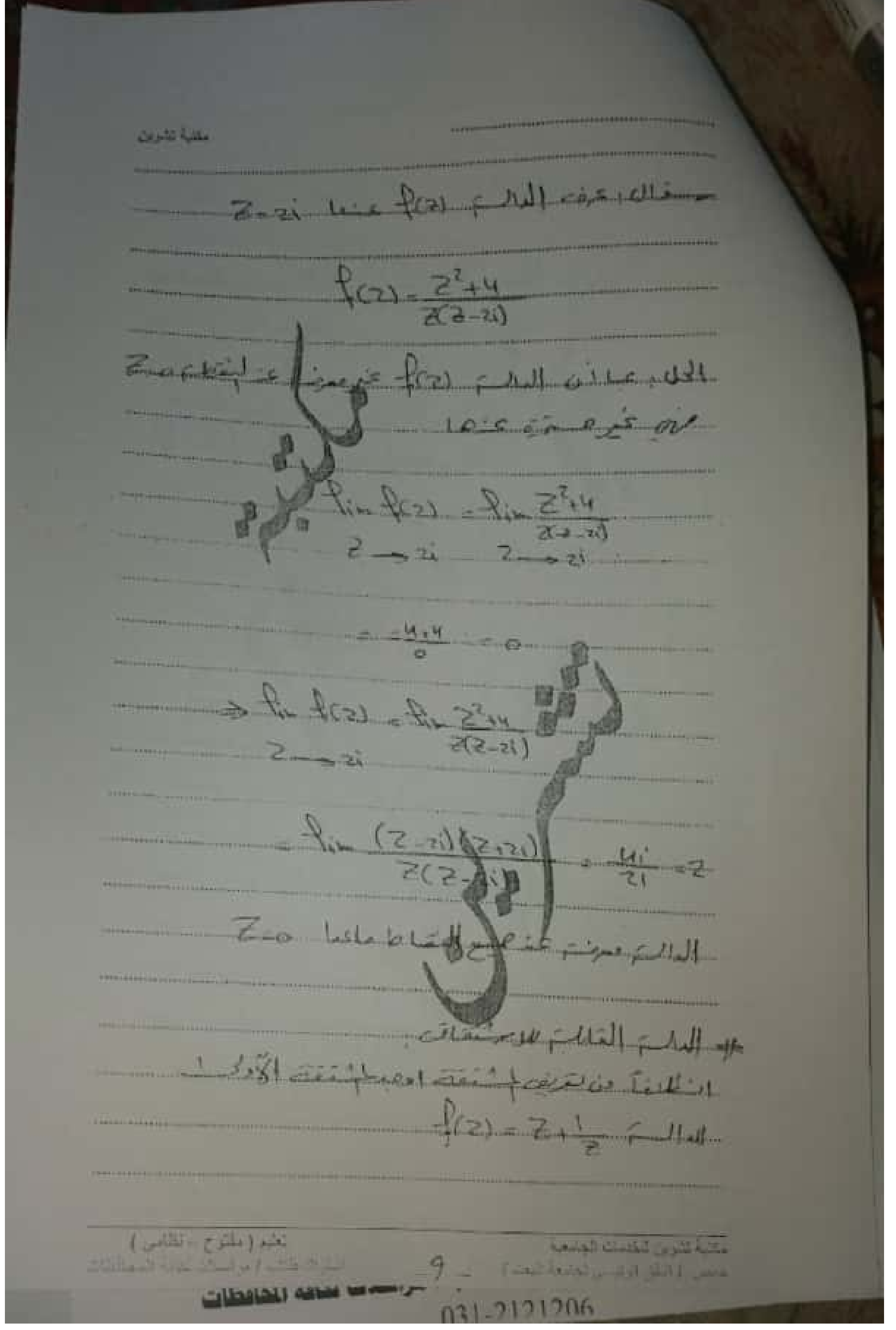
$\lim_{z\to i}\frac{3z^2+2}{1} = -3+2 = -1$

$\Rightarrow f(i) = -1$

$f'(z) = \frac{(3z^2+2)(z-i)-(z^3+2z-1)}{(z-i)^2}$

ولحساب $f'(2i)$ نعوض كل z بـ $2i$

ويتم المطلوب



سؤال: عرف الدالة $f(z)$ عندما $z=2i$

$$f(z)=\frac{z^2+4}{z(z-2i)}$$

الحل: عدا أن الدالة $f(z)$ غير معرفة عند $z=2i$

من غير معرفة عندها

$$\lim_{z\to 2i} f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{z^2+4}{z(z-2i)}$$

$$=\frac{-4+4}{0}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 2i} f(z)=\lim\frac{z^2+4}{z(z-2i)}$$

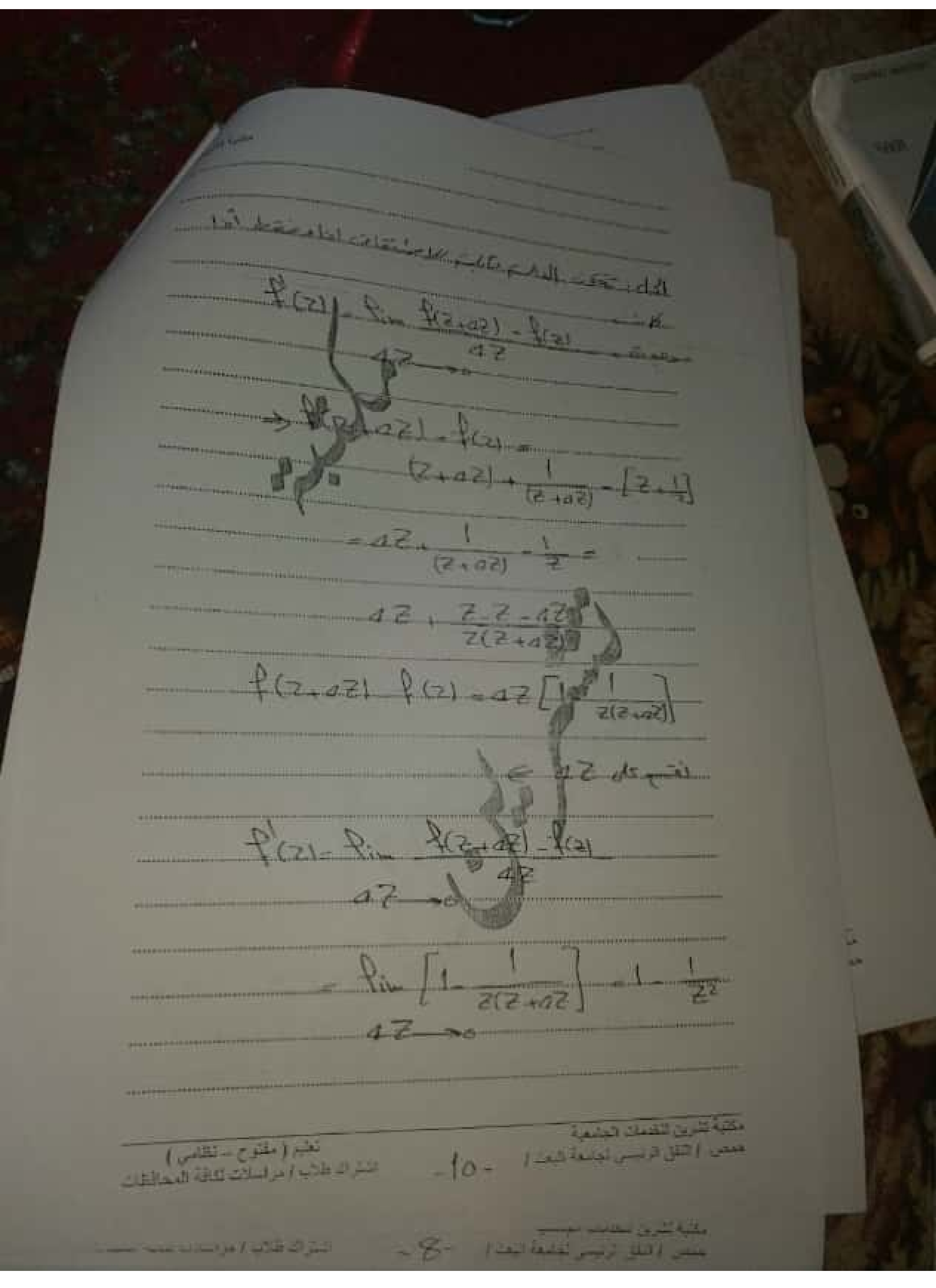
$$=\lim\frac{(z-2i)(z+2i)}{z(z-2i)}=\frac{4i}{2i}=2$$

الدالة معرفة عند جميع النقاط ماعدا $z=0$

الدالة القابلة للاشتقاق

انطلاقاً من تعريف المشتقة اوجد المشتقة الأولى

للدالة $f(z)=z+\frac{1}{z}$



الحل: تحقق الدالة قابلية للاشتقاق اذا وفقط اذا

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$f(z+\Delta z) - f(z) = (z+\Delta z) + \frac{1}{(z+\Delta z)} - \left[z + \frac{1}{z}\right]$$

$$= \Delta z + \frac{1}{(z+\Delta z)} - \frac{1}{z} =$$

$$\Delta z + \frac{z - z - \Delta z}{z(z+\Delta z)}$$

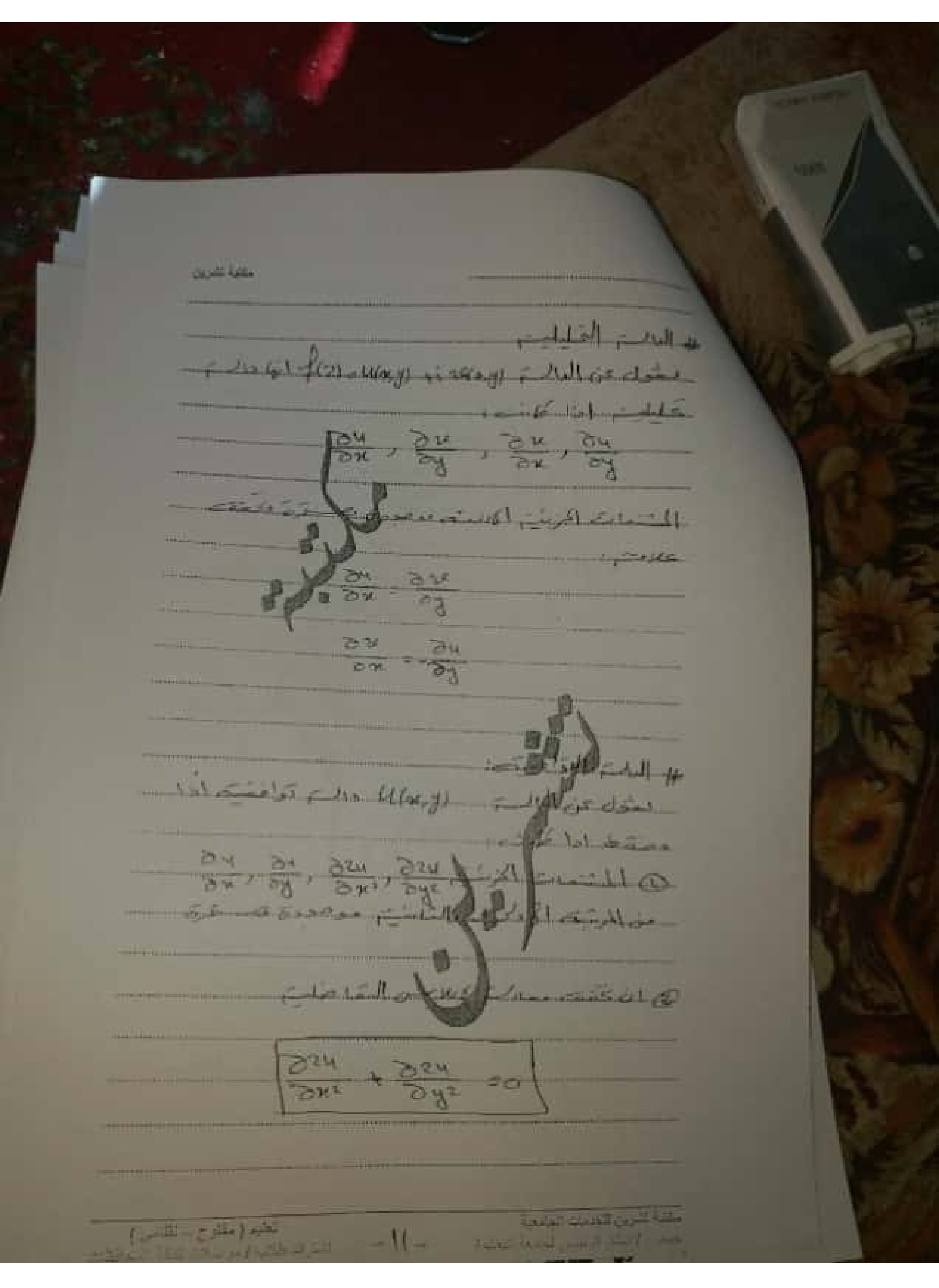
$$f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta z \left[1 - \frac{1}{z(z+\Delta z)}\right]$$

نقسم على Δz

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left[1 - \frac{1}{z(z+\Delta z)}\right] = 1 - \frac{1}{z^2}$$

مكتبة الشرق للخدمات الجامعية
حمص / النفق الرئيسي لجامعة البعث / -8- اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات



الدالة التحليلية

نقول عن الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ انها دالة تحليلية اذا كانت:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$$

المشتقات الجزئية الاولى موجودة و متصلة و تحقق علاقتي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

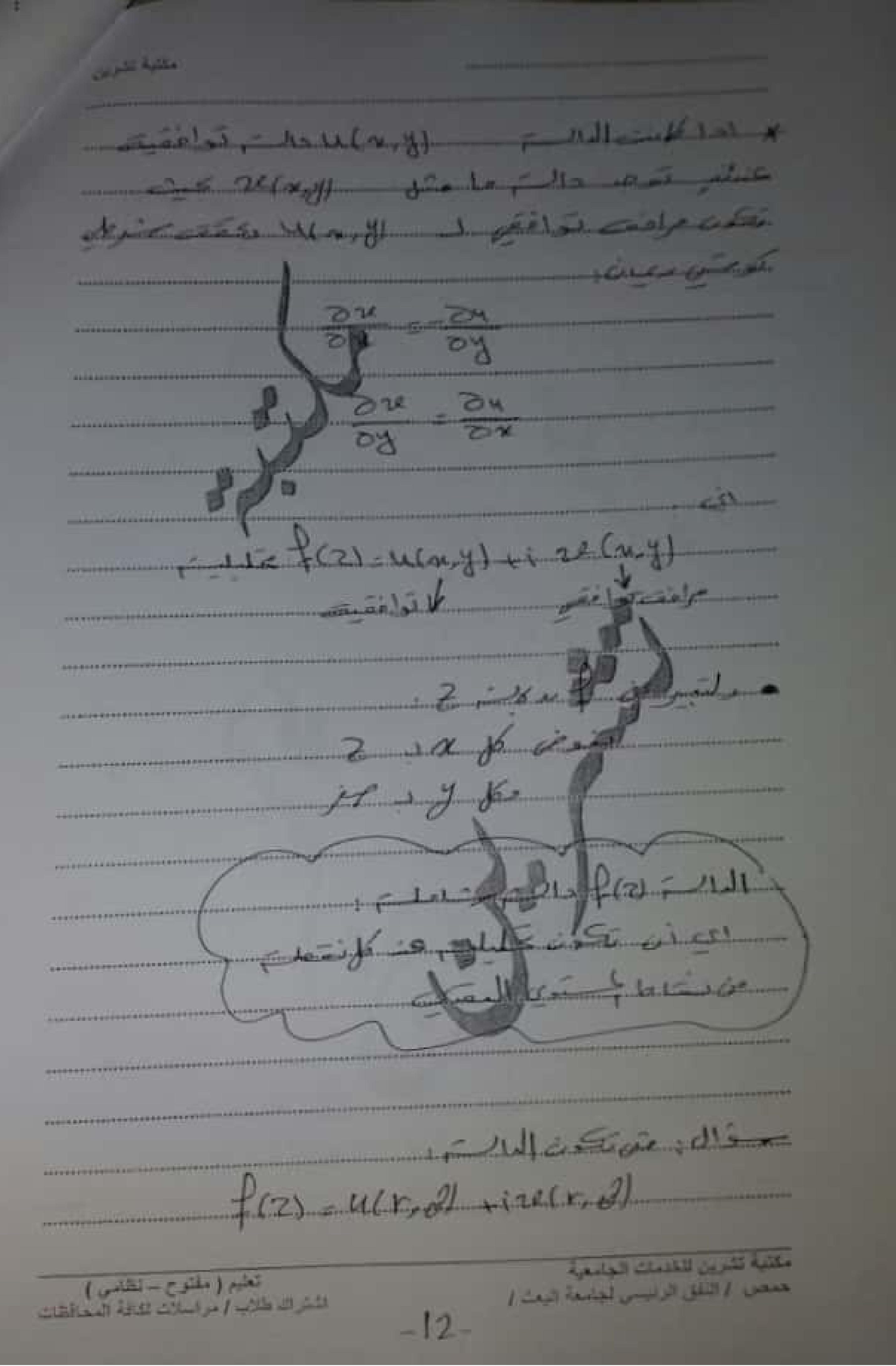
الدالة التوافقية

نقول عن الدالة $u(x,y)$ انها دالة توافقية اذا تحقق اذا كانت:

① المشتقات الجزئية $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ من الرتبة الاولى و الثانية موجودة و متصلة

② اذا كانت تحقق معادلة لابلاس التفاضلية

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$



* إذا كانت الدالة $u(x,y)$ دالة توافقية عندئذٍ توجد دالة ما مثل $v(x,y)$ بحيث تكون مرافقة توافقية لـ $u(x,y)$ وتحقق شرطي كوشي ريمان:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

أي:

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ تحليلية

u ← توافقية ، v ← مرافق توافقي

• التعبير عن f بدلالة z:
نعوض كل x بـ z
وكل y بـ صفر

الدالة $f(z)$ دالة تامة:
أي أن تكون تحليلية عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي

سؤال: متى تكون الدالة:

$$f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$$



قابلية الاشتقاق:

الحل:

الشرط الأول:

$$\frac{\partial u}{\partial r} , \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} , \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

مستمرة وموجودة

الشرط الثاني أن تحقق [illegible] بالشكل القطبي:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

• إذا تحقق الشرطان [illegible]

$$f(z) = u(r,\theta) + i v(r,\theta)$$

[illegible]

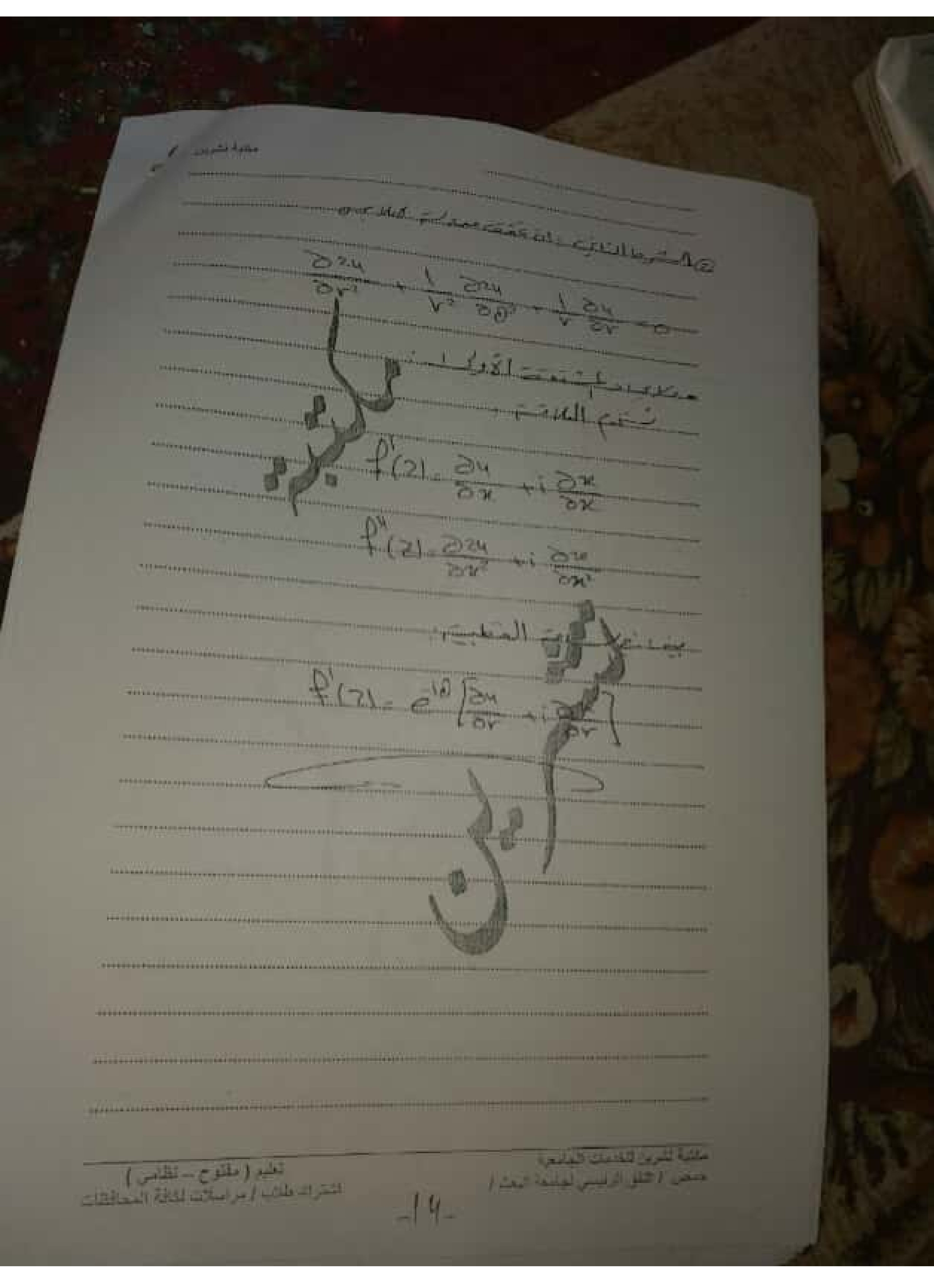
تحقيق [illegible] $\Leftrightarrow$ $f(z)$ تحليلية

\# الدالة التوافقية [illegible] $u(r,\theta)$

① الشرط الأول:

$$\frac{\partial u}{\partial r} , \frac{\partial u}{\partial \theta} , \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} , \frac{\partial u}{\partial r}$$

موجودة ومستمرة



② الشرط الثاني: أن تحقق معادلة لابلاس [illegible]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

حساب المشتقة الأولى:

نستخدم العلاقة:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

بالصيغة القطبية:

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$